

## ГРУБІ МОДЕЛІ РОЗВИТКУ В МЕДИЦИНІ

В.Л. Шевченко<sup>1</sup>, А.В. Шевченко<sup>2</sup>*Національна академія оборони України<sup>1</sup>**Національна медична академія післядипломної освіти імені П.Л. Шупика<sup>2</sup>*

Проаналізовані особливості використання лінійних, експоненціальних логістичних моделей розвитку. Запропоновані алгоритми трансформування лінійних та експоненціальних моделей в логістичні без втрати накопиченої інформації щодо властивостей об'єкта моделювання.

**Ключові слова:** прогноз, моделі розвитку, логістична функція, трансформація моделей.

## ГРУБЫЕ МОДЕЛИ РАЗВИТИЯ В МЕДИЦИНЕ

В.Л.Шевченко<sup>1</sup>, А.В. Шевченко<sup>2</sup>*Национальная академия обороны Украины<sup>1</sup>**Национальная медицинская академия последипломного образования  
имени П.Л. Шупика<sup>2</sup>*

Проанализированы особенности линейных, экспоненциальных моделей развития. Предложены алгоритмы трансформирования линейных и экспоненциальных моделей в логистические без утраты накопленной информации по свойствам объекта моделирования.

**Ключевые слова:** прогноз, модели развития, логистическая функция, трансформация моделей.

## ROUGH GROWTH MODELS FOR MEDICINE

V.L. Shevchenko<sup>1</sup>, A.V. Shevchenko<sup>2</sup>*National Defense Academy of Ukraine<sup>1</sup>**National Medical Academy of Post-Graduate Education by P.L. Shupyk<sup>2</sup>*

Features of linear, exponential and logistic development models are analyzed. Algorithm of transforming linear and exponential models to logistic ones without modeling object informational losses is proposed.

**Key words:** prognosis, growth models, logistic function, models transformation.

**Вступ.** Практика висуває до моделей суперечні умови: оперативність, точність, наочність, повнота врахування чинників впливу тощо. "Для того, щоб система моделей давала опис, що добре відображає реальність, вона має бути достатньо складною. Але в такому випадку кожен машинний експеримент буде вимагати великих витрат машинного часу. А це значить, що провести велику кількість експериментів - необхідна умова будь-якого аналізу - буває просто неможливо" [1]. Складність моделі має відповідати складності процесу та, з другого боку, можливості щодо забезпечення вхідними даними. Чим складніша модель, тим складніше забезпечити її вхідними даними, тим вищий ступінь невизначеності, в якій вона функціонує. Чим вищий ступінь невизначеності об'єк-

та, що моделюється, тим простішою має бути модель. І.Пригожин пов'язує необхідність простоти моделей з властивостями самого об'єкта моделювання [2]: "Вимога "грубості" за своєю природою відображає не обмеженість наших можливостей виконувати спостереження та вимірювання, а внутрішню структуру явищ, які ми описуємо". Грубі моделі можуть використовувати навіть фахівці без спеціальної математичної підготовки.

**Метою статті** є визначення особливостей побудови та взаємних трансформацій грубих моделей біологічних та медичних процесів розвитку.

Розвиток визначаємо залежністю корисного ефекту від витрачених ресурсів. Під **корисним ефектом** розуміємо рівень досягнення цілей лікування. Під

вхідними ресурсами розуміємо все, що може бути перетворене в корисний ефект: гроші, персонал, матеріальні засоби, ліки, апаратура, ефекти діяльності елементів організаційних структур, час тощо.

Найбільш поширеними серед грубих моделей є лінійні, експоненціальні та логістичні (рис. 1). Лінійні та експоненціальні моделі використовують для добре вивчених процесів в обмеженому діапазоні вхідних

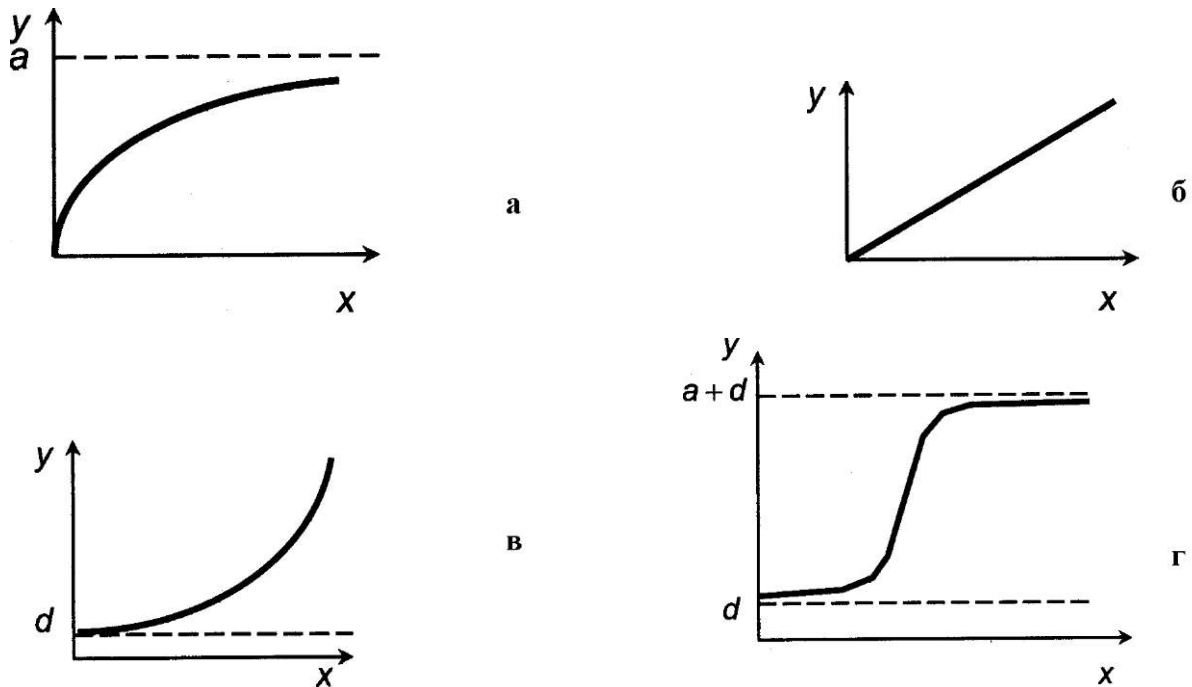


Рис.1. Моделі процесів розвитку:

а) експоненціальне насичення; б) лінійна; в) необмежений експоненціальний зріст; г) логістична.

величин, поведінка яких обумовлена стабільним ресурсним забезпеченням або які знаходяться на одному етапі життєвого циклу. Експоненціальне зростання з насиченням використовується в моделях процесів, які досягли межі свого розвитку. Серед моделей необмеженого експоненціального зростання найбільш відомий закон Мура, який базується на припущенні відсутності обмежень розвитку.

Якщо ресурсне забезпечення варіюється довільно або розглядається декілька етапів життєвого циклу, то більш адекватна логістична модель [3], яка базується на залежності у вигляді звичайного диференціального рівняння яке Р.Л.Кашьяп і А.Р. Рао вважають окремим випадком рівняння Вольтера [4], або у вигляді функції яка є рішенням (1) [3]

$$\frac{dy}{dx} = m \cdot (y - Y_{\min}) \cdot (Y_{\max} - y), \quad 1$$

А.Р. Рао вважають окремим випадком рівняння Вольтера [4], або у вигляді функції яка є рішенням (1) [3]

$$y = Y_{\min} + \frac{Y_{\max} - Y_{\min}}{1 + e^{-m \cdot (Y_{\max} - Y_{\min}) \cdot (x - \Delta x)}} = d + a \cdot SL(x),$$

$$d = Y_{\min}, \quad a = Y_{\max} - Y_{\min},$$

$$SL(x) = \frac{a}{1 + e^{-\frac{4k}{a} \cdot (x - \Delta x)}} = \frac{a}{1 + e^{-\frac{2}{T} \cdot (x - \Delta x)}},$$

де у - вихідний ефект; х - вхідний ресурс;  $SL(x)$  - логістична  $SL$ -функція,  $Y_{\min}$ ,  $Y_{\max}$  - нижнє та верхнє обмеження вихідного ефекту;  $m$  - постійний коефіцієнт;  $\Delta x$  - абсциса точки симетрії (зсув кривої вздовж осі абсцис);  $k$  - тангенс кута нахилу дотичної до кривої в точці симетрії;  $T$  - стала ресурсу, яка дорівнює половині ширини діапазону вхідних ресурсів, при яких відбувається інтенсивне зростання ефекту.

Інколи у звичайне рівняння Лотки-Вольтера вводять логістичні компоненти (у вигляді правих частин рівняння (1)), наприклад, для підвищення адекватності моделей "паразит-хазяїн" [5]. Для різних задач (1) може бути записано у різному вигляді, наприклад, в екології з урахуванням "фізики процесу" динаміки

$$\text{популяцій} \quad [2] \quad \frac{dy}{dt} = m \cdot y \cdot (Y_{\max} - y) - s \cdot y, \quad \text{де } y$$

чисельність популяції,  $t$  - час,  $Y_{\max}$  - несуча спроможність середовища,  $m$ ,  $s$  - характерні сталі народжуваності та смертності. Для моделювання епідеміологічних даних використовують багатомірну логістичну регресію у вигляді моделей із взаємодією та без взаємодії [6].

"Логістичний розвиток є найпростішим і, в той же час, неодноразово підтвердженим на емпіричному

матеріалі описом циклу розвитку системи, коли при виснаженні відповідних ресурсів відбувається перехід з експоненти на логісту" [7]. Прикладами логістичних моделей є: еволюція алкогольного пошкодження печінки [8], вивільнення месалазину із таблеток салюфальку [9], динаміка показників рН-метрії [10], частота дивертикульозу залежно від віку пацієнтів [11], динаміка чисельності популяцій та населення [2, 4, 5]; динаміка епідемії [6]; динаміка ризику захворювань після Чорнобильської аварії [12], закон Арншта-Шульца стосовно залежності ефекту лазерної терапії від дози освітлювання [13] (залежність моделюється різницею двох SL- функцій із зсувами  $y = SL_1(x - \Delta x_1) - SL_2(x - \Delta x_2)$ ).

**Основні властивості SL-функції** [3].

1. Наявність асимптот:  $y = d$ ;  $y = d + a$ .

2. Симетрія відносно точки  $(\Delta x; d + 0.5 a)$ .

3. Швидкість зростання ефекту на лінійній ділянці SL- функції  $[\Delta x - T; \Delta x + T]$  приблизно дорівнює  $k = \frac{dSL(\Delta x)}{dx}$ .

4. Стала ресурсу SL - функції  $T$  (є поширенням поняття сталої часу експоненти) дорівнює довжині відрізка асимптоти між абсцисою точки симетрії та точкою перетину осі абсцис з прямою, яка дотична до графіка функції у точці симетрії.

При первинному створенні моделей параметри логістичних залежностей визначають статистично або методом аналогій. Для обох випадків існує простий (на основі лінійних вимірів) алгоритм визначення параметрів логістичної залежності (2) [3], а саме послідовно визначити: 1)  $d$ , 2)  $a + d$ , 3)  $T$  або  $k$ , залежно від постановки задачі, 4)  $\Delta x$ .

Поширеною є ситуація, коли при моделюванні об'єкта спочатку створювались лінійні або експоненціальні моделі. Інформація, яка була при цьому накопичена, спрощує визначення параметрів логістичних моделей.

**Перетворення лінійних моделей.** Нехай певна лінійна модель задана залежністю  $y = a_1 x + a_0$ . Встановимо алгоритм визначення параметрів логістичної функції (2).

1. В околиці точки симетрії графік прямої подібний до (2), отже  $k = a_1$ .

2.  $d$  і  $a$  визначаються з емпіричних даних як мінімально можливі  $d$  (найчастіше  $d = 0$ ) та максимально можливі  $a + d$  вихідні ефекти. При  $d = 0$  найчастіше  $a$  дорівнює 110-160 % від нормативно визначеного ефекту.

3. Абсциса точки симетрії  $\Delta x = (0.5 a + d - a_0) / a_1$  визначається як абсциса середини відрізка прямої, який відсічений обмеженнями  $d$  і  $a + d$ .

**Усунення обмежень.** Повне усунення обмежень  $d' < x < d' + a'$  без будь-яких додаткових умов можливо нелінійним перетворенням координат. Для цього пропонується SL- перетворення координат

$$x = SL'(x') = d' + \frac{a'}{1 + e^{-c'(x' - \Delta x')}}; \quad c' = \frac{4}{a'}; \quad \Delta x' = 0.5a' +$$

$d$ , де  $x, x'$  - обмежена та необмежена змінні;  $d', a', c', \Delta x'$  - сталі параметри функції  $SL'(x')$ . При всіх  $x' \in [-\infty; +\infty]$  функція  $SL'(x')$  безперервна, монотонна, така, що диференціюється і має безперервні похідні.

Найбільший ефект від SL-перетворення координат можна отримати у випадку, якщо початкові вирази вже містять деякі SL-функції, аргументами яких є саме ті змінні, до яких планується застосувати SL-перетворення координат. Наприклад, якщо  $x$  є аргументом деякої SL-функції  $SL(x)$ , то після

SL-перетворення координат ми отримуємо складну функцію  $SL(SL(y))$ , яка може бути апроксимована певною SL-функцією  $SL_2(y)$  з похибкою не більше 2%. Така апроксимація дозволяє врахувати обмеження ціною зміни величин параметрів залежностей без зміни структури моделі та структури відповідних аналітичних виразів.

**Перетворення експоненціальних моделей.** Аналогічно розглянемо алгоритм перетворення експоненціальної функції в логістичну (2). Нехай експоненціальна модель задана у вигляді

$$y = a_0(1 - e^{-\frac{x}{T_e}}) + a_2 \quad \text{або} \quad y = b_0 + b_2 e^{\frac{x}{T_e}}.$$

1. Основним припущенням є співпадання точки симетрії з віссю ординат  $\Delta x = 0$ . При необхідності після визначення інших параметрів графік логістичної залежності можна зсунути вздовж осі абсцис зміною  $\Delta x$ .

2. Стала часу логістичної функції приблизно дорівнює сталій часу експоненти  $T = T_e$ .

$$3. \quad d = 2a_2 - a_0; \quad a = 2(a_0 - a_2) \quad \text{або} \quad d = b_0; \quad a = 2b_2.$$

**Висновки.** В статті проаналізовані особливості лінійних, експоненціальних та логістичних моделей розвитку. Запропоновані алгоритми трансформування лінійних та експоненціальних моделей в логістичні зі збереженням корисної інформації щодо властивостей об'єкта моделювання, яка була накопичена у попередніх моделях.

Подальшими напрямками досліджень має бути розповсюдження розроблених алгоритмів на багатовимірний випадок та розробка алгоритмів трансформації для інших видів моделей розвитку в медицині та біології.

**Література**

1. Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа / Моисеев Н.Н. - М.: Наука, 1981. - 488 с.
2. Пригожин И. Порядок из хаоса: Новый диалог человека с природой / Пригожин И., Стенгерс И. - М.: Прогресс, 1986. - 432 с.
3. Шевченко В. Л. Использование SL-зависимостей для построения моделей развития технологий и упрощения процедур поиска оптимальных решений на примере уравнения Беллмана / Шевченко В. Л. // Системні технології. Регіональний міжвузівський зб. наук. праць. - 2004. - Вип. 6 (35). - С. 148-153.
4. Кашьяп Р.Л. Построение динамических стохастических моделей по экспериментальным данным / Кашьяп Р. Л., Рао А.Р.; [пер. с англ.] - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1983. - 384 с.
5. Мэрди Дж. Модели популяций / Мэрди Дж. // Математическое моделирование. - М.: Мир, 1979. - С. 109-127.
6. Качинський А.Б. Безпека, загрози і ризик: наукові концепції та математичні методи / Качинський А.Б. - К., 2004. - 472 с.
7. Евин И. А. Модели развития и теория катастроф / Евин И. А., Яблонский А.И. // Системные исследования. Методологические проблемы [Ежегодник]. - М.: Наука, 1982. - С. 98-130.
8. Губергриц Н.Б. "Эссенциале Форте Н" и "Эссенциале Н" в гепатологии и гастроэнтерологии / Губергриц Н.Б. // Сучасна гастроентерологія. - 2008: - №5(43). - С. 79-89.
9. Рот М. Воспалительные заболевания кишечника: [практическое руководство] / Рот М., Бернхарт В.; [ред. русс. изд.: В.Голофеевский, С.Ситкин]. - Freiburg Germany: DR. FALK PHARMA GmbH, 2004. - 60 с.
10. Рефлюксна хвороба стравоходу: [посібник] / [під ред. П.Місюни; пер. з польської А.С.Барвінська, В.В.Вашук, І.Д.Герич (заг.ред.) та ін.]. - [Вип.2]. - Львів: Галицька видавнича спілка, 2004. - 176 с.
11. Верманн К. Дивертикулез и дивертикулит толстой кишки / Верманн К., Фрюморген П.; научн. ред. С.Ситкин. - Людвигсбург (Германия): DR. FALK PHARMA GmbH, 2007. - 47 с.
12. Дрозд І.П. Радіаційно уражені регіони: антропоєкологічні ризики / Дрозд І.П., Серкіз Я.І. // Матер. міжнар. конф. "Антропогенно-змінене середовище України: ризики для здоров'я населення та екологічних систем". Спец. вип. журналу "Екологічний вісник". - К.: Чорнобильінтерінформ, 2003. - С.153-166.
13. Шевченко В.Л. Основы рационального применения терапевтических лазеров / Шевченко В. Л. - К.: НПО "Профессор", 2003. - 170 с.